

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

MODEL

- **Toate subiectele (I, II și III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Bestimme den reellen Teil der komplexen Zahl $(\sqrt{3} + i)^6$.
- 5p** 2. Es sei die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Berechne $(f \circ f)(512)$.
- 5p** 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\cos 2x + \sin x = 0$.
- 5p** 4. Es sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestimme die Anzahl der Trippeln (a, b, c) mit der Eigenschaft, dass $a, b, c \in M$ und $a < b < c$.
- 5p** 5. Berechne die Distanz zwischen den parallelen Geraden die von den Gleichungen $x + 2y = 6$ und $2x + 4y = 11$. bestimmt sind.
- 5p** 6. Das Parallelogramm $ABCD$ hat $AB = 1$, $BC = 2$ und $m(\sphericalangle BAD) = 60^\circ$. Berechne das Skalarprodukt $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Für $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, sei das System
$$\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}, x, y, z \in \mathbb{R}.$$
- 5p** a) Zeige, dass die Determinante des Systems $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ ist.
- 5p** b) Löse das System im Fall, dass es lösbar bestimmt ist.
- 5p** c) Wenn bekannt ist dass, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$, zeige, dass das System unendlich viele Lösungen (x, y, z) hat, so dass $x^2 + y^2 = z - 1$.
2. Es sei die Menge $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.
- 5p** a) Bestimme die Anzahl der Elemente der Menge G .
- 5p** b) Gib ein Beispiel von einer Matrix $A \in G$ mit der Eigenschaft $\det A \neq \hat{0}$ und $\det A^2 = \hat{0}$.
- 5p** c) Bestimme die Anzahl der Lösungen der Gleichung $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

1. Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

5p a) Bestimme die Gleichung der Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f .

5p b) Berechne $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p c) Beweise, dass die Funktion f auf dem Intervall $(-\infty, -1)$ konkav ist.

2. Es seien, für alle $n \in \mathbb{N}^*$, die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ und die Zahlen

$$I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx.$$

5p a) Berechne $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$.

5p b) Zeige, dass $I_n \leq \ln 2$.

5p c) Zeige, dass $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$.

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

MODEL

- Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|----|---|----|
| 1. | $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ | 2p |
| | $z^6 = 2^6 \cdot \left(\cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6}\right) = -2^6 \Rightarrow \operatorname{Re} z^6 = -64$ | 3p |
| 2. | $f(512) = \frac{1}{8}$ | 2p |
| | $(f \circ f)(512) = f\left(\frac{1}{8}\right) = 2$ | 3p |
| 3. | Ecuatia devine $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, cu soluțiile $\sin x = -\frac{1}{2}$ și $\sin x = 1$. | 3p |
| | Obținem $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, sau $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. | 2p |
| 4. | Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M | 3p |
| | Acesta este $C_6^3 = 20$. | 2p |
| 5. | Punctul $A(0, 3)$ se află pe prima dreaptă. | 2p |
| | Distanța este $d(A, d_2) = \frac{ 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 11 }{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$. | 3p |
| 6. | $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2$ | 3p |
| | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1$ | 1p |
| | $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 + 2^2 = 5$ | 1p |

SUBIECTUL al II - lea

(30 de puncte)

| | | |
|------|---|----|
| 1.a) | $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$ | 2p |
|------|---|----|

Barem de evaluare și de notare

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

| | | |
|------|--|----------------|
| | $\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$, de unde rezultă concluzia | 3p |
| b) | Observăm că $x=0, y=1, z=0$ verifică sistemul. Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată. | 3p 2p |
| c) | $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (c-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=c$. Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta, z=1-\alpha-\beta$. Putem lua $\beta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha})$, cu $4\alpha^2 + 4\alpha - 1 \leq 0$. | 2p 2p 1p |
| 2.a) | a, b, c pot lua fiecare 4 valori Avem $4^3 = 64$ matrice. | 3p 2p |
| b) | Luăm $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ $\det(A) = \hat{2}, \det(A^2) = \hat{0}$ | 3p 2p |
| c) | $X = \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$ Ecuația devine $a^2 = \hat{1}, b(a+c) = \hat{0}, c^2 = \hat{0}$. Obținem $a \in \{\hat{1}, \hat{3}\}, c \in \{\hat{0}, \hat{2}\}, b = \hat{0}$, deci există 4 soluții | 2p 1p 2p |

SUBIECTUL al III - lea

(30 de puncte)

| | | |
|------|--|----------------|
| 1.a) | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow m = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$, deci avem asimptota oblică $y = x$. | 2p 3p |
| b) | $f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2 + x + 1)}{(x+1)^2}$ $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ | 3p 2p |
| c) | $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$, deci f este concavă pe $(-\infty, -1)$ | 3p 2p |
| 2.a) | $\int_0^\pi \sin 2x dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx - \int_{\pi/2}^\pi \sin 2x dx$ $I = \frac{-\cos 2x}{2} \Big _0^{\pi/2} + \frac{\cos 2x}{2} \Big _{\pi/2}^\pi$ $I = 2$ | 2p 2p 1p |
| b) | $I_n = \int_\pi^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx \leq \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x} dx$ $\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _\pi^{2\pi} = \ln 2$ | 3p 2p |
| c) | $I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{ \sin t }{t} dt$ | 1p 2p |

Barem de evaluare și de notare

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

| | |
|---|-----------|
| $I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{ \sin t }{t} dt + \int_{n\pi+2\pi}^{n\pi+3\pi} \frac{ \sin t }{t} dt + \dots + \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \frac{ \sin t }{t} dt$ | 1p |
| $I_n \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \sin t dt + \frac{1}{\pi(n+2)} \int_{n\pi+2\pi}^{n\pi+3\pi} \sin t dt + \dots + \frac{1}{2n\pi} \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \sin t dt$ | 1p |
| <p>Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin t dt = 2, \forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă concluzia.</p> | |

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

MODEL

- Toate subiectele (I, II și III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Es sei die arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in welcher $a_1 = 3$ und $a_3 = 7$. Berechne die Summe der ersten 10 Glieder der Folge.
- 5p** 2. Bestimme die reellen Zahlen m für welche der Punkt $A(m, -1)$ dem Schaubild der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$ angehört.
- 5p** 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_5(2x + 3) = 2$.
- 5p** 4. Bestimme die Anzahl der Teilmengen mit 3 Elementen einer Menge welche 5 Elemente hat.
- 5p** 5. Im kartesischen System xOy seien die Punkte $A(-1, -2)$, $B(1, 2)$ und $C(2, -1)$. Berechne die Distanz von dem Punkt C zu dem Mittelpunkt der Strecke AB .
- 5p** 6. Das Dreieck ABC hat $AB = 8$, $AC = 8$ und $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Es seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Funktion $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, wobei $X^2 = X \cdot X$.
- 5p** a) Berechne $\det(I_3 + B)$.
- 5p** b) Beweise, dass $f(A) = I_3 + B$.
- 5p** c) Zeige, dass $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, wobei $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$.
2. In der Menge der ganzen Zahlen definiert man die Verknüpfungen $x * y = x + y - 3$ und $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$.
- 5p** a) Löse in der Menge der ganzen Zahlen die Gleichung $x \circ x = x * x$.
- 5p** b) Bestimme die ganze Zahl a mit der Eigenschaft, dass $x \circ a = 3$, für jede ganze Zahl x .
- 5p** c) Löse das Gleichungssystem $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$, wobei $x, y \in \mathbb{Z}$.

1. Es sei die Funktion $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

5p a) Berechne $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p b) Berechne $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p c) Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f .

2. Es sei die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

5p a) Berechne das Volumen des Körpers der durch Rotation des Schaubildes der Funktion f , um die Ox Achse, entsteht.

5p b) Berechne $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

MODEL

- Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|-----------|--|-------------------------------|
| 1. | $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$ $a_{10} = 21$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 120$ | <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> |
| 2. | $A(m, -1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = -1$ $m = 2 \text{ sau } m = 1$ | <p>3p</p> <p>2p</p> |
| 3. | $2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ $2x + 3 = 25 \Rightarrow x = 11 \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ | <p>1p</p> <p>4p</p> |
| 4. | $C_5^3 =$ $= 10$ | <p>3p</p> <p>2p</p> |
| 5. | <p>Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow M(0, 0)$</p> <p>Scrierea formulei distanței dintre 2 puncte</p> $CM = \sqrt{5}$ | <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> |
| 6. | $\text{Aria } \triangle ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$ $\frac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$ | <p>2p</p> <p>3p</p> |

SUBIECTUL al II - lea

(30 de puncte)

| | | |
|-------------|---|---------------------|
| 1.a) | $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(I_3 + B) = 1$ | <p>2p</p> <p>3p</p> |
|-------------|---|---------------------|

Barem de evaluare și de notare

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

| | | |
|-------------|---|-------------------------------|
| b) | $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $f(A) = A^2 - 3A + I_3 =$ $= I_3 + B$ | <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> |
| c) | $(f(A))^3 = (I_3 + B)^3 = I_3 + 3B + 3B^2 + B^3$ $B^3 = O_3$ <p>Finalizare</p> | <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |
| 2.a) | $(x-3)^2 - 2(x-3) = 0$ $(x-3)(x-5) = 0$ $x = 3 \text{ sau } x = 5$ | <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> |
| b) | $(x-3)(a-3) + 3 = 3$ $a = 3 \in \mathbf{Z}$ | <p>2p</p> <p>3p</p> |
| c) | $\begin{cases} x + y = 6 \\ (x - y - 3)(-2) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ | <p>3p</p> <p>2p</p> |

SUBIECTUL al III - lea

(30 de puncte)

| | | |
|-------------|--|-------------------------------|
| 1.a) | $(x^3)' = 3x^2$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ <p>Finalizare</p> | <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |
| b) | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ $f'(1) = 0$ | <p>3p</p> <p>2p</p> |
| c) | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$ <p>Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1; +\infty)$ și f descrescătoare pe $[-1; 0)$ și pe $(0; 1]$</p> | <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> |
| 2.a) | $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^2(2 - x^2) dx =$ $= \pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{7\pi}{15}$ | <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> |
| b) | $\int_0^1 x\sqrt{2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_2^1 \sqrt{t} dt =$ | <p>3p</p> |

Barem de evaluare și de notare

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

| | | |
|-----------|---|-----------|
| | $= \frac{t\sqrt{t}}{3} \Big _1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ | 2p |
| c) | $\int_0^x f(t) dt = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}{3}$ | 3p |
| | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2-x^2}}{3} \cdot (-2x)}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 2p |

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

MODEL

- Toate subiectele (I, II și III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculează probabilitatea ca, după o alegere aleatorie a unui element din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, acesta să fie o soluție a ecuației $x^2 - 4x + 3 = 0$.
- 5p 2. Calculează suma $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 40$.
- 5p 3. Determină valorile parametrului real m astfel încât ecuația $x^2 - 4mx + 1 = 0$ să aibă soluții reale.
- 5p 4. Calculează distanța de la punctul $A(1, 2)$ la dreapta $d: x + y + 1 = 0$.
- 5p 5. Rezolvă în \mathbb{R} ecuația $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.
- 5p 6. Calculează $\frac{1}{2} \cos 135^\circ + 3 \sin 135^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- In mulțimea numerelor întregi se definește operația $x * y = xy + 2x + 2y + a$, unde $a \in \mathbb{Z}$.
- 5p a) Determină $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât operația să aibă un element neutru.
- 5p b) Pentru $a = 2$ demonstrează că operația este asociativă.
- 5p c) Pentru $a = 2$ demonstrează că $(x + y + 2) * z = (x * z) + (y * z) + 2$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- 5p d) Pentru $a = 2$ determină mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{există } x' \in \mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x * x' = -1\}$.
- 5p e) Pentru $a = 2$ determină $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * y = 3$.
- 5p f) Fie mulțimea $H = \{-3, -1\}$. Determină $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât pentru orice $x, y \in H$, să avem $x * y \in H$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- Es să fie date numerele reale a, b, c și determinanta $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.
- 5p a) Pentru $a = 1, b = 2$ și $c = 3$, calculează determinanta D .
- 5p b) Demonstrează că dacă $a = b$, atunci $D = 0$.
- 5p c) Pentru $b = 2$ și $c = 3$, determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $D = 2$.
- 5p d) Demonstrează că $D = (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$.
- 5p e) Demonstrează că dacă $D = 0$, atunci cel puțin două din numerele a, b și c sunt egale.
- 5p f) Demonstrează că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci D este un număr întreg par.

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

MODEL

- Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|----|--|----------------|
| 1) | $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$ Finalizare: $P = \frac{2}{5}$ | 2p 3p |
| 2) | $1 + 2 + 3 + \dots + 40 = \frac{40 \cdot 41}{2} = 820$ | 3p 2p |
| 3) | $\Delta = 16m^2 - 4$ $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ | 2p 3p |
| 4) | Scrierea formulei $d(A, d) = \frac{ 1+2+1 }{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ | 3p 2p |
| 5) | $7^x = y; y^2 - 8y + 7 = 0$ $y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ $y_2 = 7 \Rightarrow x_2 = 1$ | 1p 2p 2p |
| 6) | $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ; \sin 135^\circ = \sin 45^\circ$ Finalizare: $\frac{1}{2}\cos 135^\circ + 3\sin 135^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ | 2p 3p |

SUBIECTUL al II - lea

(30 de puncte)

| | | |
|----|--|----------------|
| a) | Din definiția elementului neutru și cum legea este comutativă, avem $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Z}$ $(e + 2)x + 2e + a = x, \forall x \in \mathbb{Z}$ de unde $\begin{cases} e + 2 = 1 \\ 2e + a = 0 \end{cases}$ Deci $a = 2$ și $e = -1$. | 1p 2p 2p |
| b) | $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ $(x * y) * z = xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 6$ $x * (y * z) = xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 6$ | 1p 2p 2p |
| c) | $x * y = (x + 2)(y + 2) - 2 \Rightarrow (x + y + 2) * z = (x + y + 4)(z + 2) - 2$ | 2p |

| | | |
|-----------|---|-------------------------------------|
| | $(x * z) + (y * z) + 2 = (x + 2)(z + 2) - 2 + (y + 2)(z + 2) - 2 + 2 =$ $= (x + y + 4)(z + 2) - 2 = (x + y + 2) * z$ | 2p 1p |
| d) | Din $x * x' = (x + 2)(x' + 2) - 2 = -1$, rezultă $x' = -2 + \frac{1}{x + 2} \in \mathbb{Z}$ pentru $x \in \mathbb{Z}$ $(x + 2) 1$, adică $(x + 2) \in \{-1, 1\}$ $M = \{-3, -1\}$ | 2p 2p 1p |
| e) | Din $x * y = 3$ se obține $(x + 2)(y + 2) = 5$ Finalizare: $(x; y) \in \{(-1; 3), (-3; -7), (3, -1), (-7; -3)\}$ | 1p 4p |
| f) | $(-3) * (-3) = a - 3 = (-1) * (-1) \in \{-3, -1\} \Rightarrow a \in \{0, 2\}$ $(-3) * (-1) = (-1) * (-3) = a - 5 \in \{-3, -1\} \Rightarrow a \in \{2, 4\}$ $a = 2$ | 2p 2p 1p |

SUBIECTUL al III - lea
(30 de puncte)

| | | |
|-----------|--|-------------------------------------|
| a) | $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ Finalizare: $D = 2$ | 2p 3p |
| b) | $a = b \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ Finalizare: $D = 0$ | 2p 3p |
| c) | $D = a^2 - 5a + 6$ $D = 2 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$ $a = 1$ sau $a = 4$ | 2p 1p 2p |
| d) | Scăzând prima linie din celelalte două obținem $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 0 & c - a & c^2 - a^2 \end{vmatrix}$ $D = (b - a)(c - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b + a \\ 0 & 1 & c + a \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$ | 2p 3p |
| e) | $D = (b - a)(c - a)(c - b) = 0 \Rightarrow b - a = 0$ sau $c - a = 0$ sau $c - b = 0$ Finalizare | 3p 2p |
| f) | Dintre cele 3 numere întregi a, b, c , cel puțin două au aceeași paritate, deci diferența lor este număr par. Dar cum $D = (b - a)(c - a)(c - b)$ rezultă că D este număr par | 3p 2p |